

发现数学之美

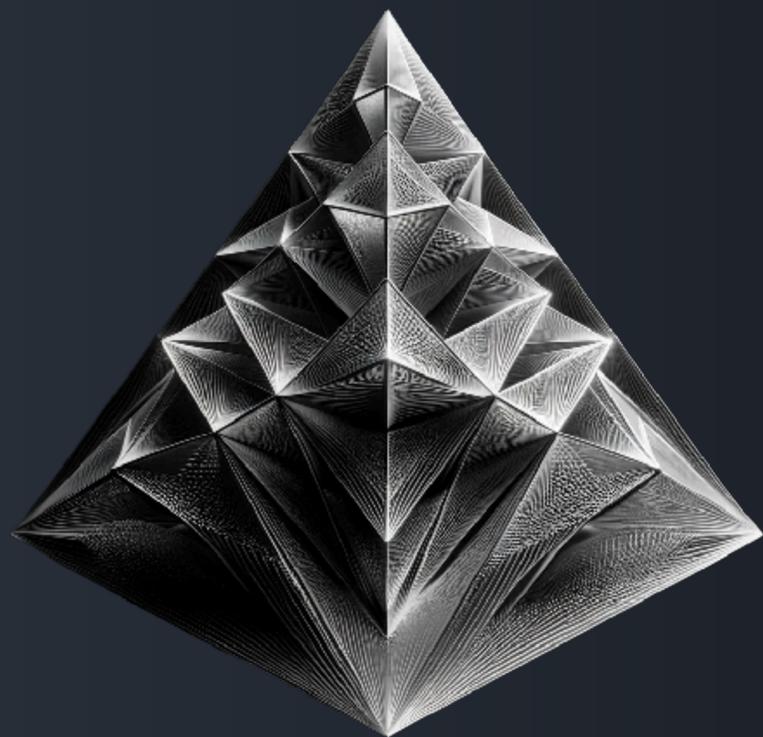
从抽屉原理到弹子球世界



苑明理

2023 年 11 月

目录



- 如此简单的抽屉原理
- 入射球的光线会跑出来吗?
- 庞加莱回归定理
- 神奇的椭圆竟然会困住一部分光!
- 伯克霍夫的推理
- 米尔札哈尼与镜子世界
- 太多太多的不知道

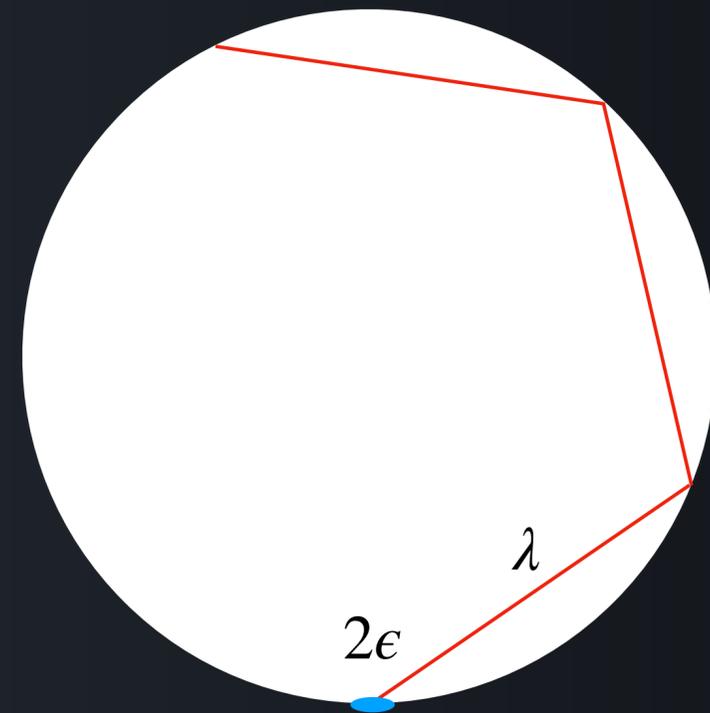
如此简单的抽屉原理

- 组合学中的基本原理之一
- 将 n 个物品放入 m 个抽屉，且 $n > m$ ，则必有一个抽屉中有至少两个物品。



狄利克雷

入射球的光线会跑出来吗？



规定周角是 1

是否存在 k 使得

$$k\lambda \bmod 1 < \epsilon$$

- 光线从一个直径为 2ϵ 的小孔射入，经过若干轮反射之后，是否会再次从小口射出？

入射球的光线会跑出来吗？

易见如果步长 λ 比 ϵ 小，则一定出射，剩余情况分两种讨论

如果 λ 是有理数，则一定出射；如果 λ 是无理数，怎么办？

对给定的 ϵ ，一定存在一个整数 n 使得 $n\epsilon > 1$ 成立

此时，我们把圆周等分成 n 份，其中每份的宽度为 $\frac{1}{n}$ 且我们有 $\epsilon > \frac{1}{n}$ 成立

我们让光在圆内反射 n 次，形成 n 个落点，结合入口的 0 点，共有 $n + 1$ 个点

$$0, \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots, n\lambda$$

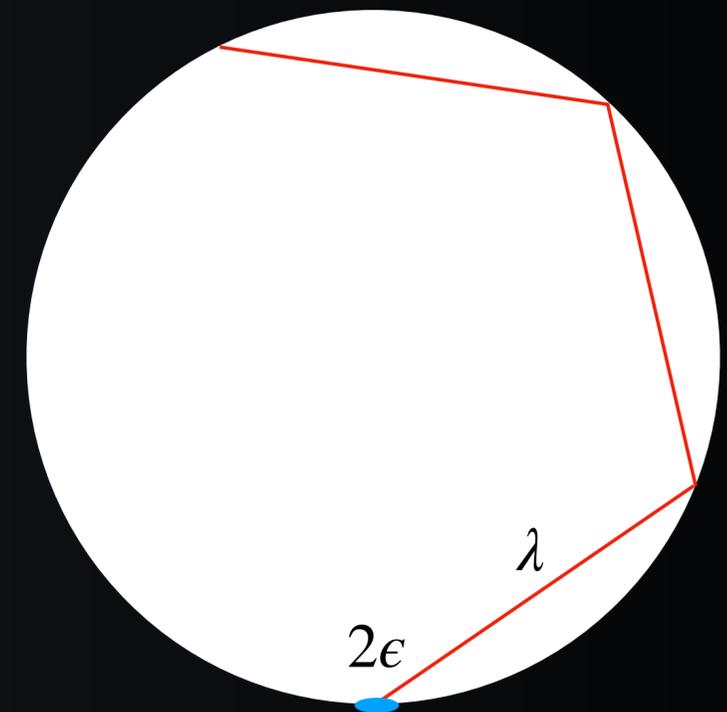
依据抽屉原理必有两个落点落在同一个划分区域内，设其为 $p\lambda$ 和 $q\lambda$ ，即有

$$|p\lambda - q\lambda| < \epsilon$$

于是，我们有

$$k = |p - q|$$

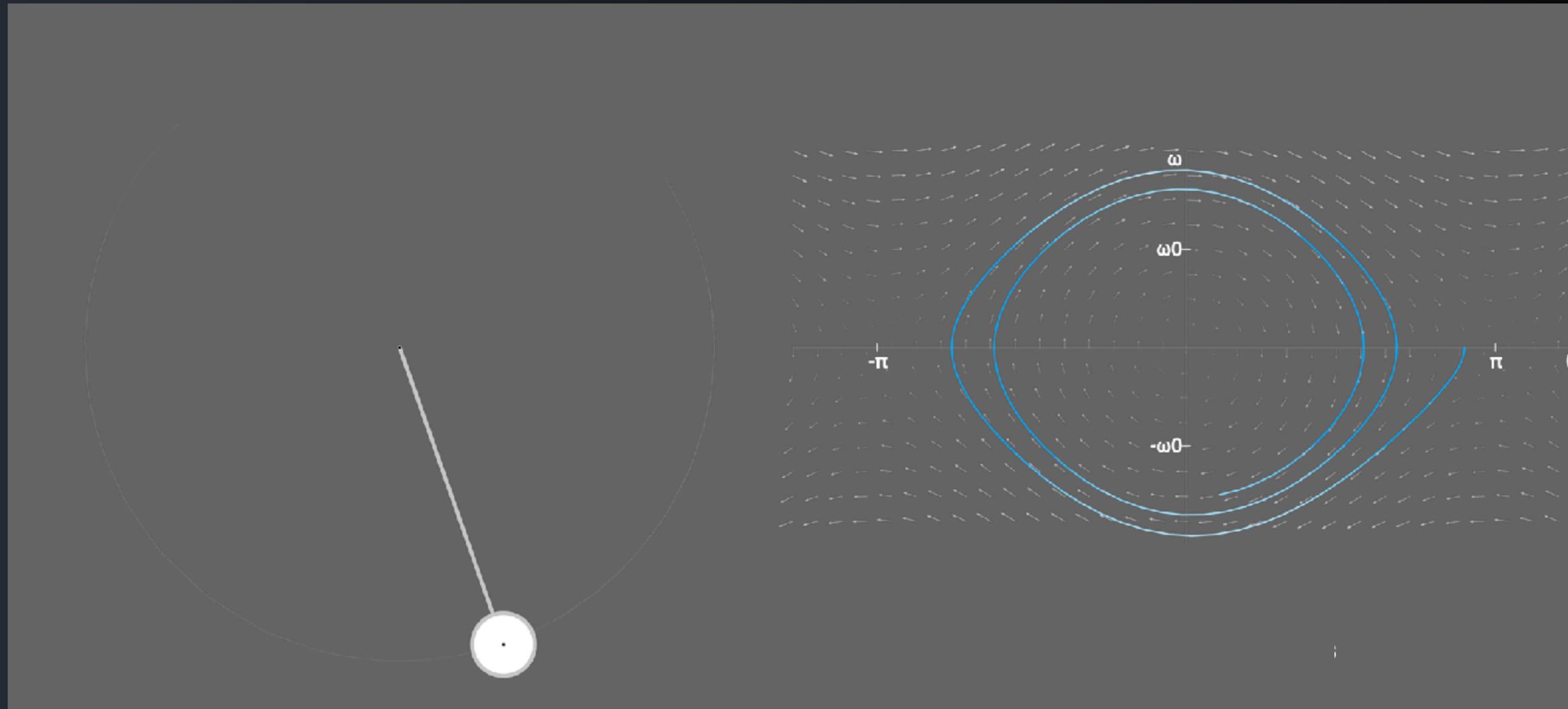
此时，光线一定射出



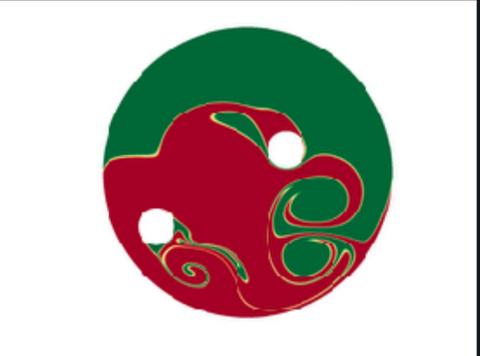
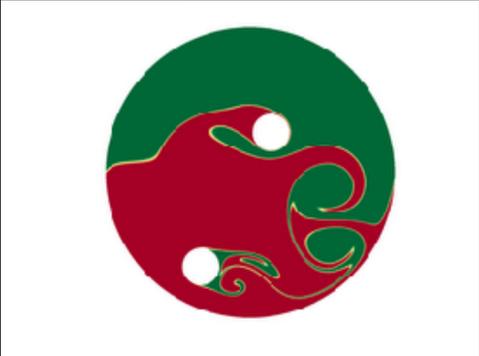
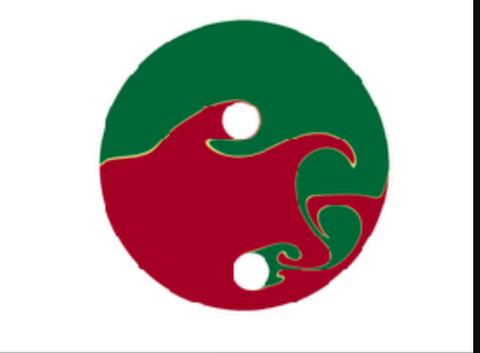
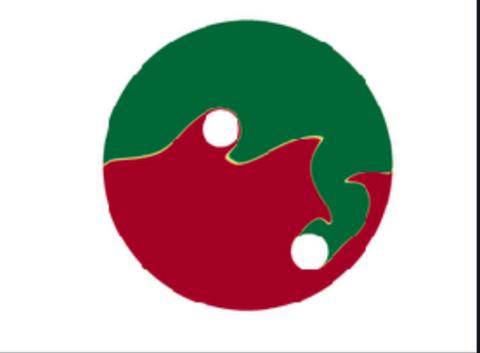
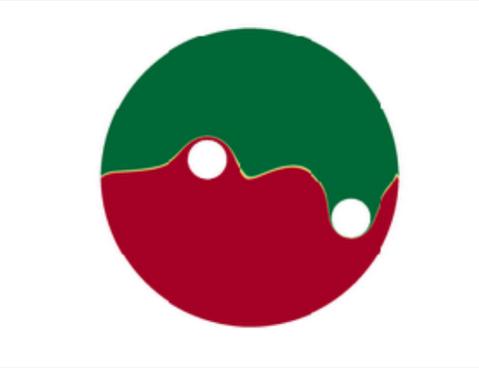
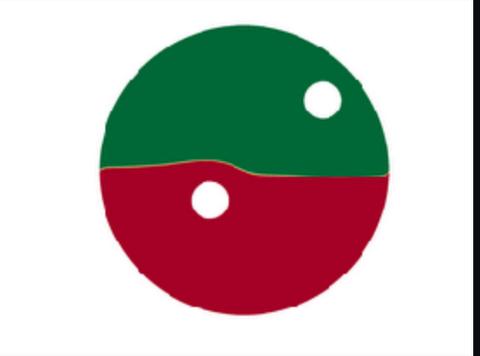
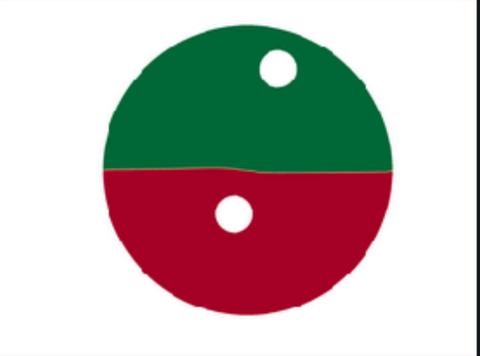
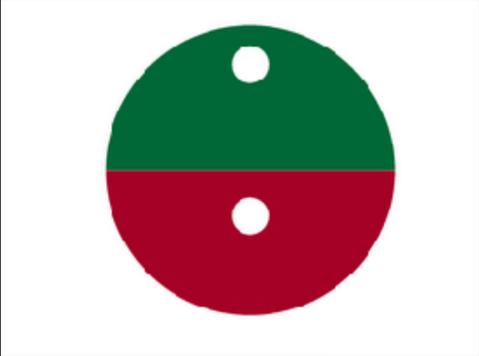
相空间的概念

有阻尼单摆的相空间和相流

<https://openprocessing.org/sketch/1051190/>



想象力练习：保持体积不变的流动



庞加莱回归定理

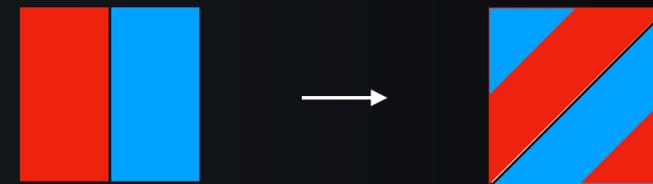
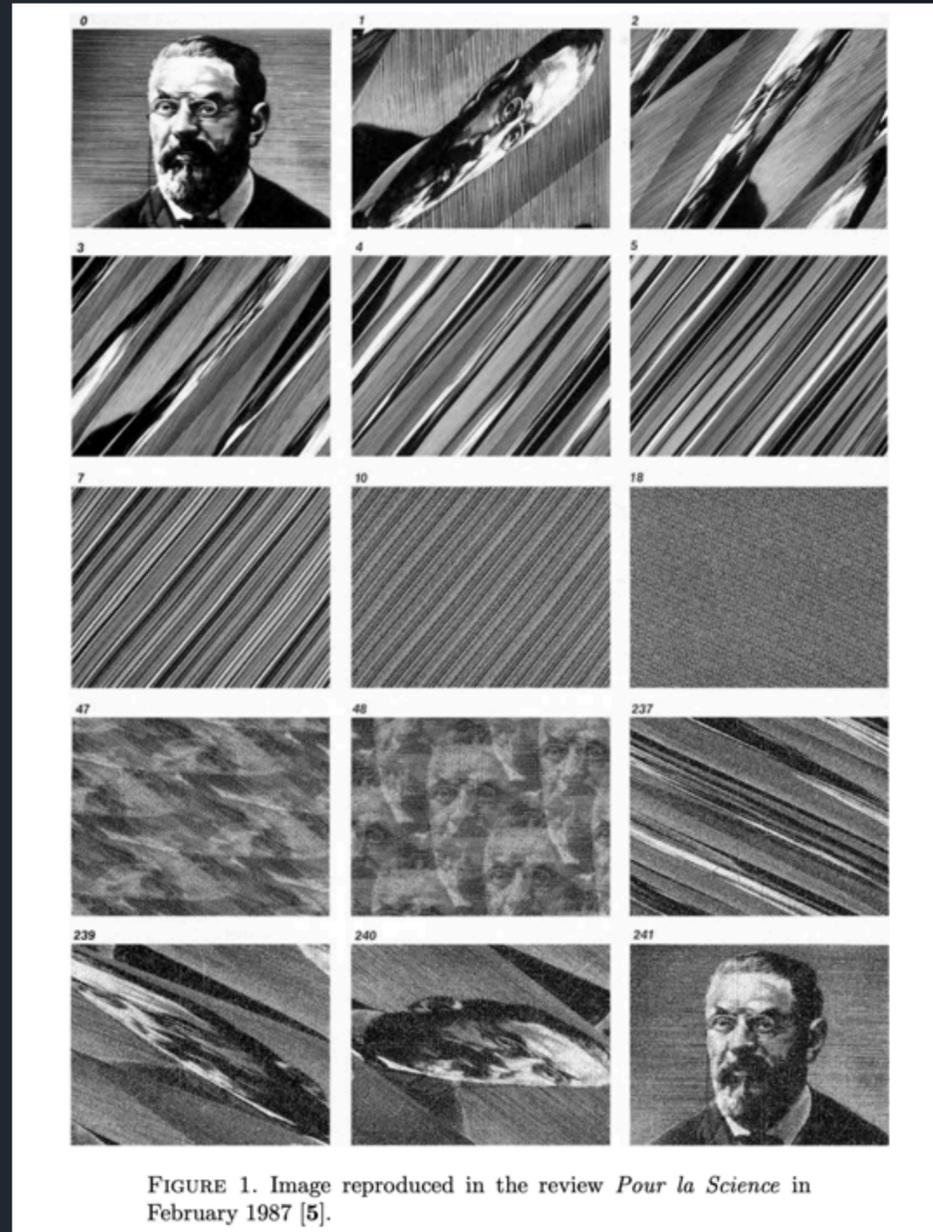
- 如果一个演化系统的所有轨道皆有界，且相流保持体积不变，则对于相空间中每个点，在整个演化历史中，总会有轨道不停的回到这个点附近。



庞加莱

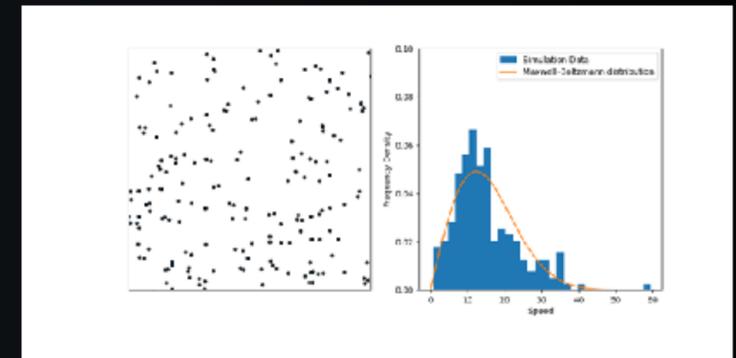
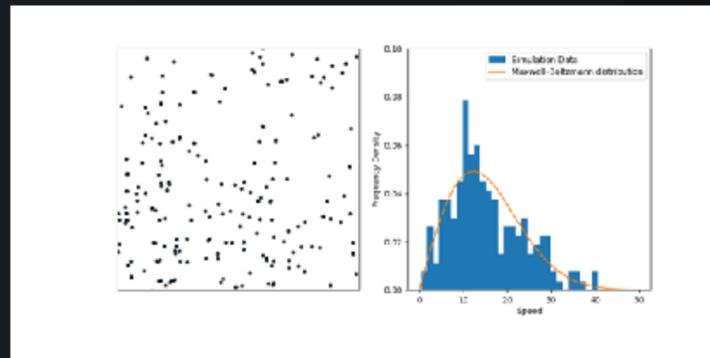
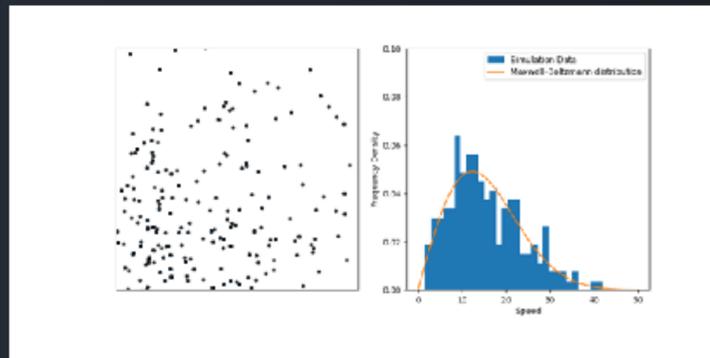
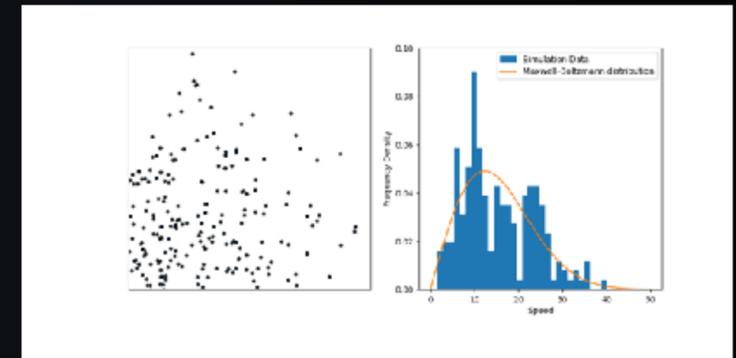
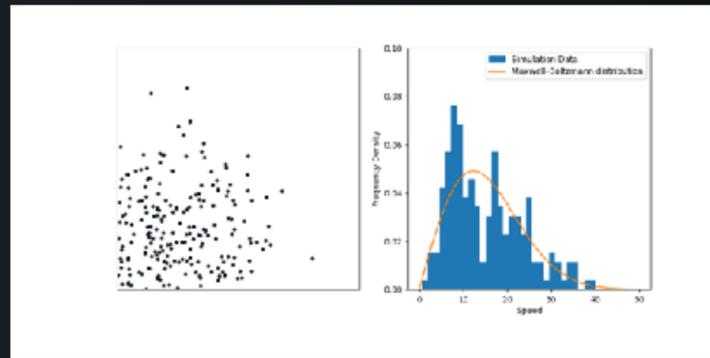
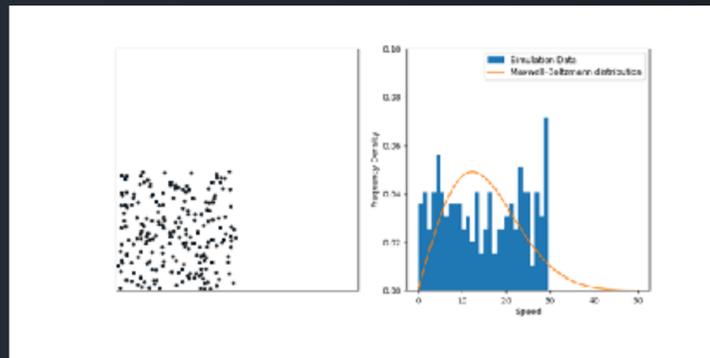


例子：回归的庞加莱



回归定理、熵增与时间的单向性

- 回归定理是一个数学定理，对数学真理时间没有意义，回归可以比宇宙的年龄还要长
- 热力学第二定律确保熵增，似乎与回归定理矛盾？



相关的讨论至今仍然是个开放话题

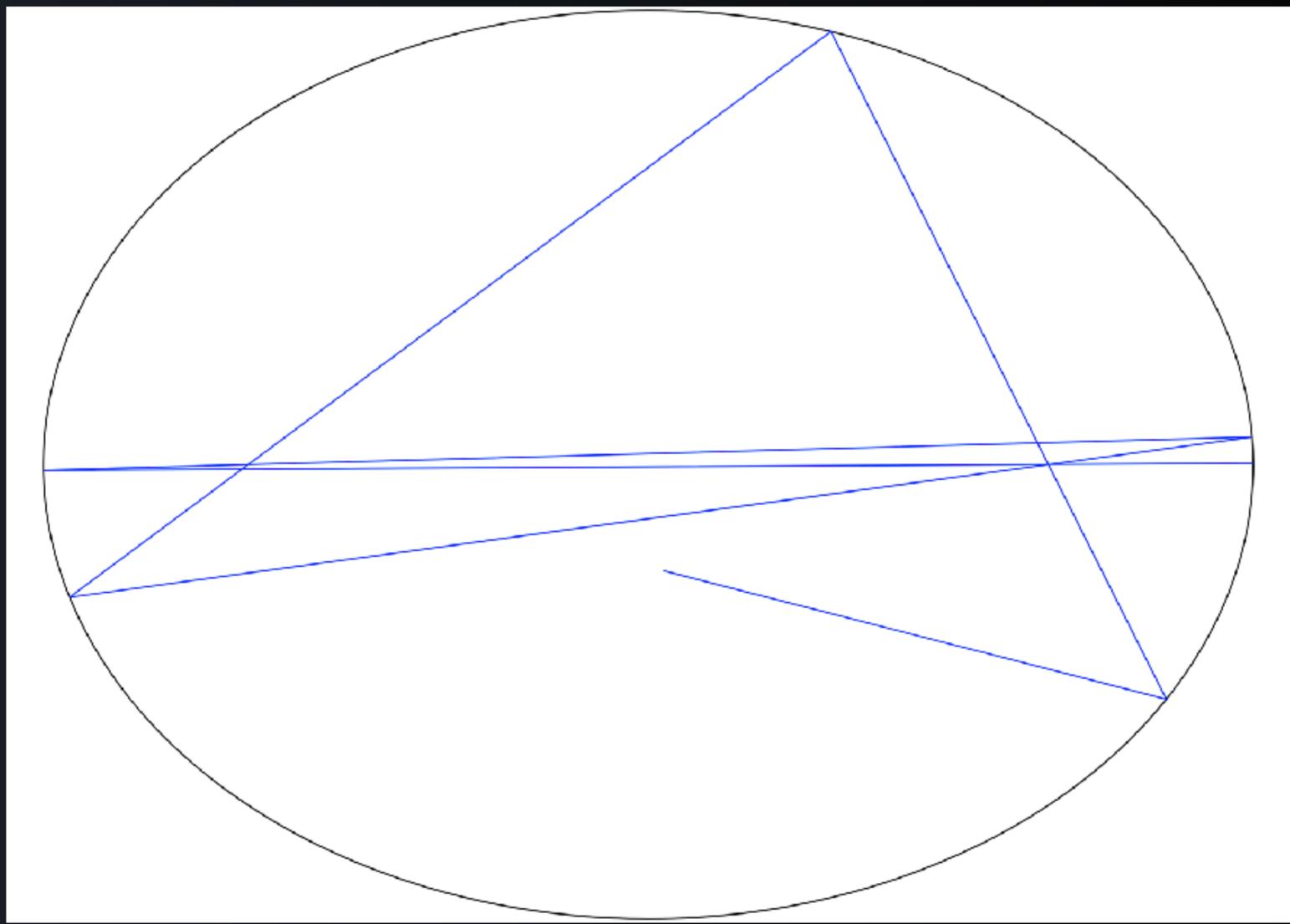
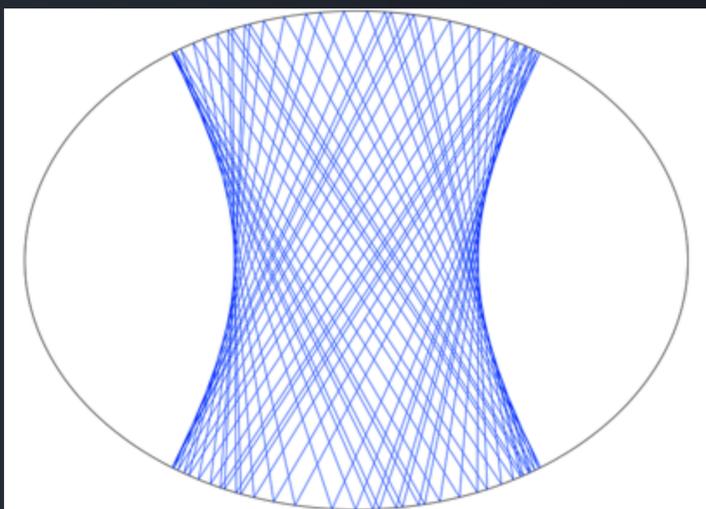
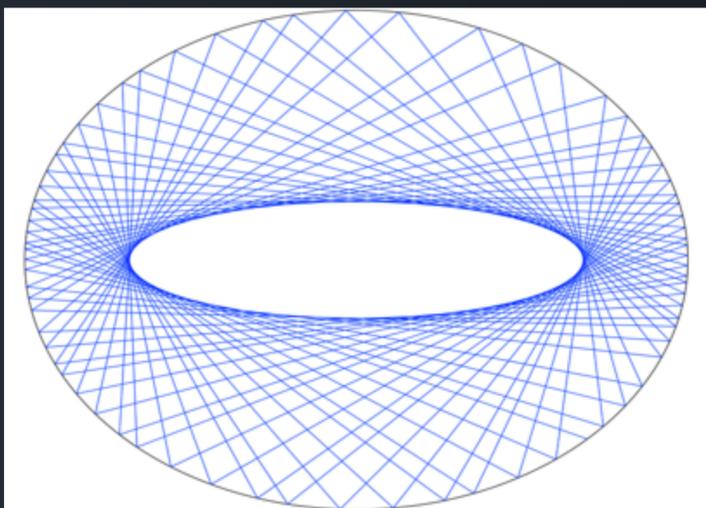
测试题：迭代式里的数字

- V. I. 阿诺尔德 (V. I. Arnold) 在他经典的力学书中提出了一个问题
- 考虑序列 $\{2^n\}$ ，我们取它十进制表示里最高位的那个数字构成一个新的序列
- 即：1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, 4, ...
- 问：数字 7 是否会出现现在新序列里？该序列里 7 和 8 出现的频率是否相同？

提示：思考一下 $\log 2$ 是不是无理数
然后比较 $\log 8 - \log 7$ 和 $\log 9 - \log 8$

神奇的椭圆竟然可以困住一部分光

- 是否所有的系统都有这种回归性呢？答案是否定的，椭圆就可以困住一部分入射光线，入射后永远出不来



过一个焦点的光线反射后必过另一焦点

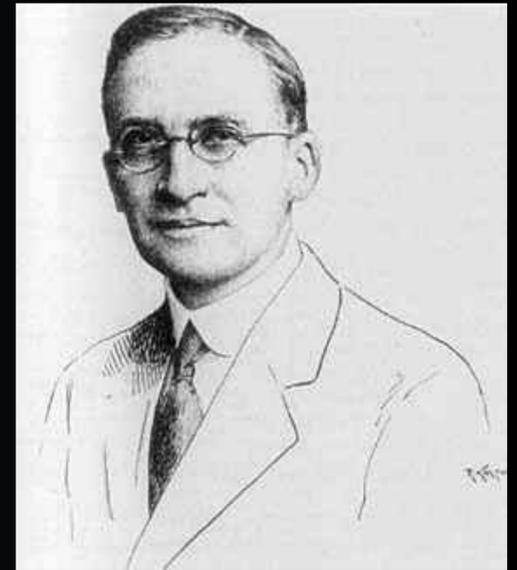
这个小结论会有一个有趣的推论

伯克霍夫的推理

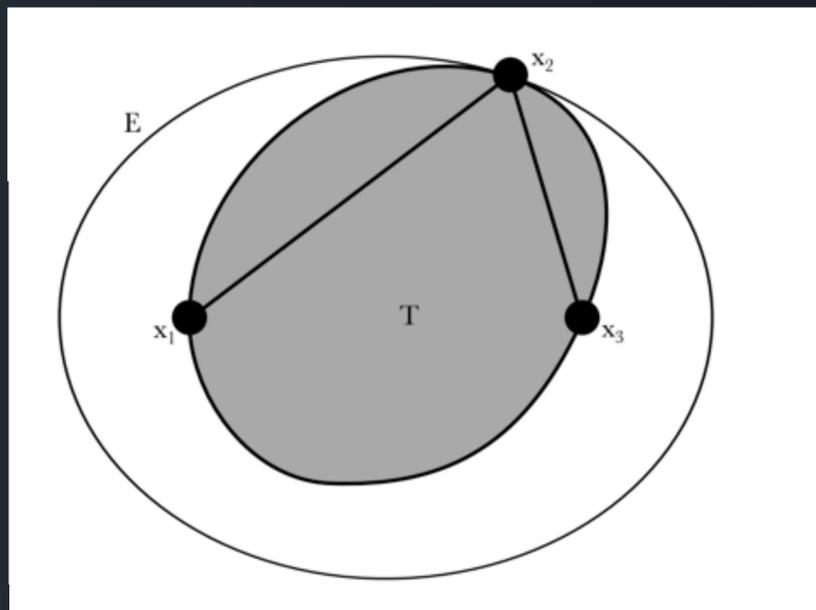
- 平面上光线在一个光滑的凸闭曲线内反射，是否存在周期性的反射路径？

伯克霍夫对周期反射路径的存在性给予了肯定回答，论证过程非常简单优美

给定一个周期 p ，光滑凸闭曲线 C 上所有的内接 p -多边形中周长最大者就是周期性的反射路径



伯克霍夫



考虑光滑凸闭曲线上该内接多边形上临近的两个边和对应的三个点 x_1, x_2, x_3

作一个椭圆 E 以 x_1, x_3 为焦点且该椭圆过 x_2 点，则该椭圆必与闭曲线 C 相切

回顾椭圆的定义，对椭圆上的任何一个点 x'_2 有

$$|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| = |x_1 - x'_2| + |x'_2 - x_3|$$

所以如不相切，我们可以沿着交线向椭圆外侧移动 x_2 点使得多边形整体周长更长

米尔札哈尼与镜子世界

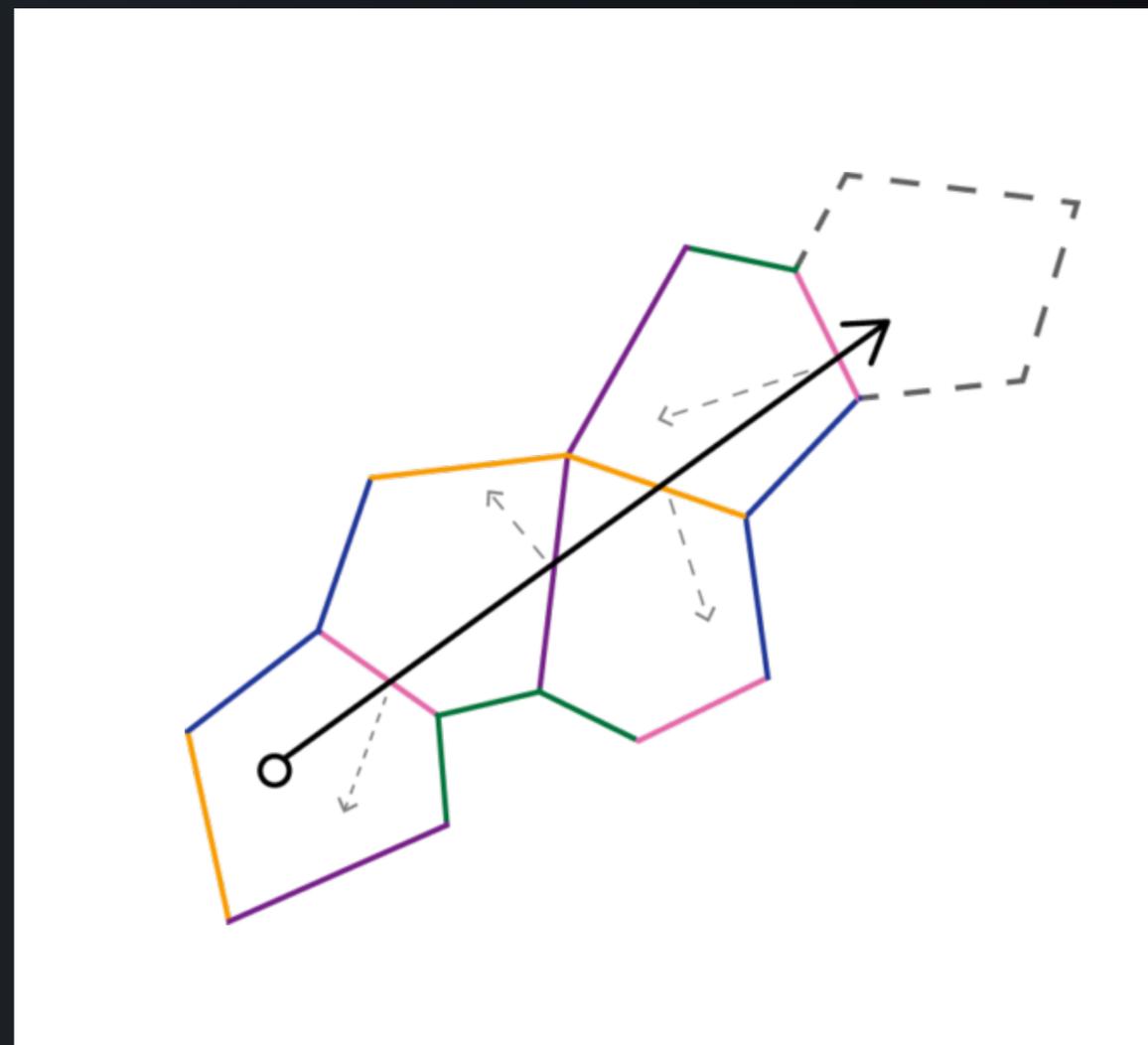


米尔札哈尼
首位女性菲尔兹奖获得者

她的贡献之一是将弹子球问题
同曲面上深刻的几何性质联系起来



无限镜像



穿行在无限的镜像世界

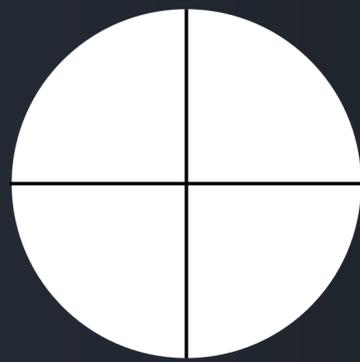
每个多边形的角和周角的比都是有理数

太多太多的问题

- 大自然的奥秘无穷无尽，可以问无数的问题
 - 随手使劲握一张废纸，打开后，褶皱线有什么规律？
 - 为什么绝大多数鹅卵石是扁的？它受到的侵蚀平均看起来各方向不一样吗？
 -

太多太多不知道

- 开动我们的好奇心，在身边平常处也有问题，可能就有新发现



公平的



不公平



切出的面积上的不公平性与切分的周长上的不公平性之间
有什么关系？

随着刀数的增加
追求公平和追求尽量多切出不同的份数之间
是矛盾的吗？

感谢

