重新发现
算术里的秘密

苑明理

2017年4月

目录

- 数的历史：人类思维的多样
- 数的表示法：语言与世界如何共处
- 数的独立性：通过自我表示获得意义

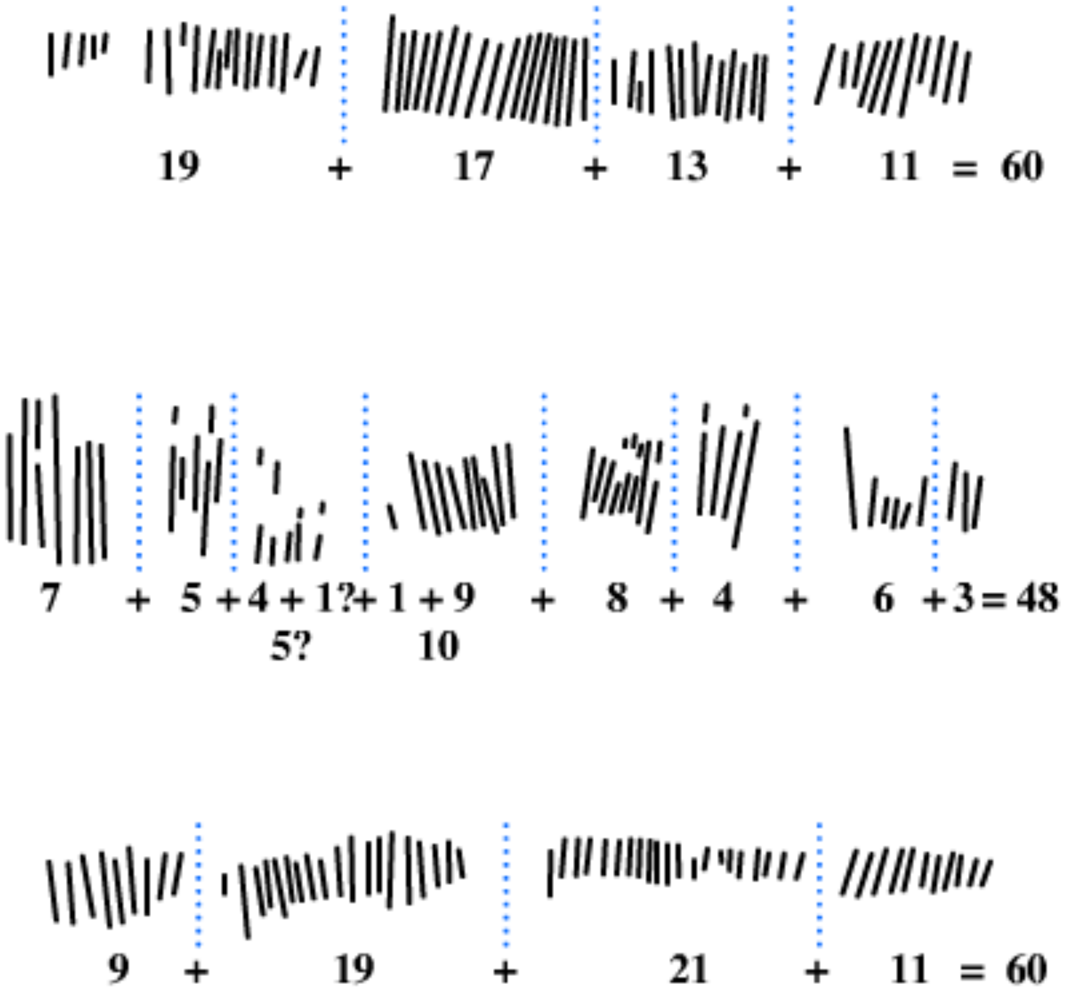
数的历史

人类思维的多样

Ishango 骨刻

旧石器时代晚期, 约公元前 18,000 年 - 公元前 20,000 年

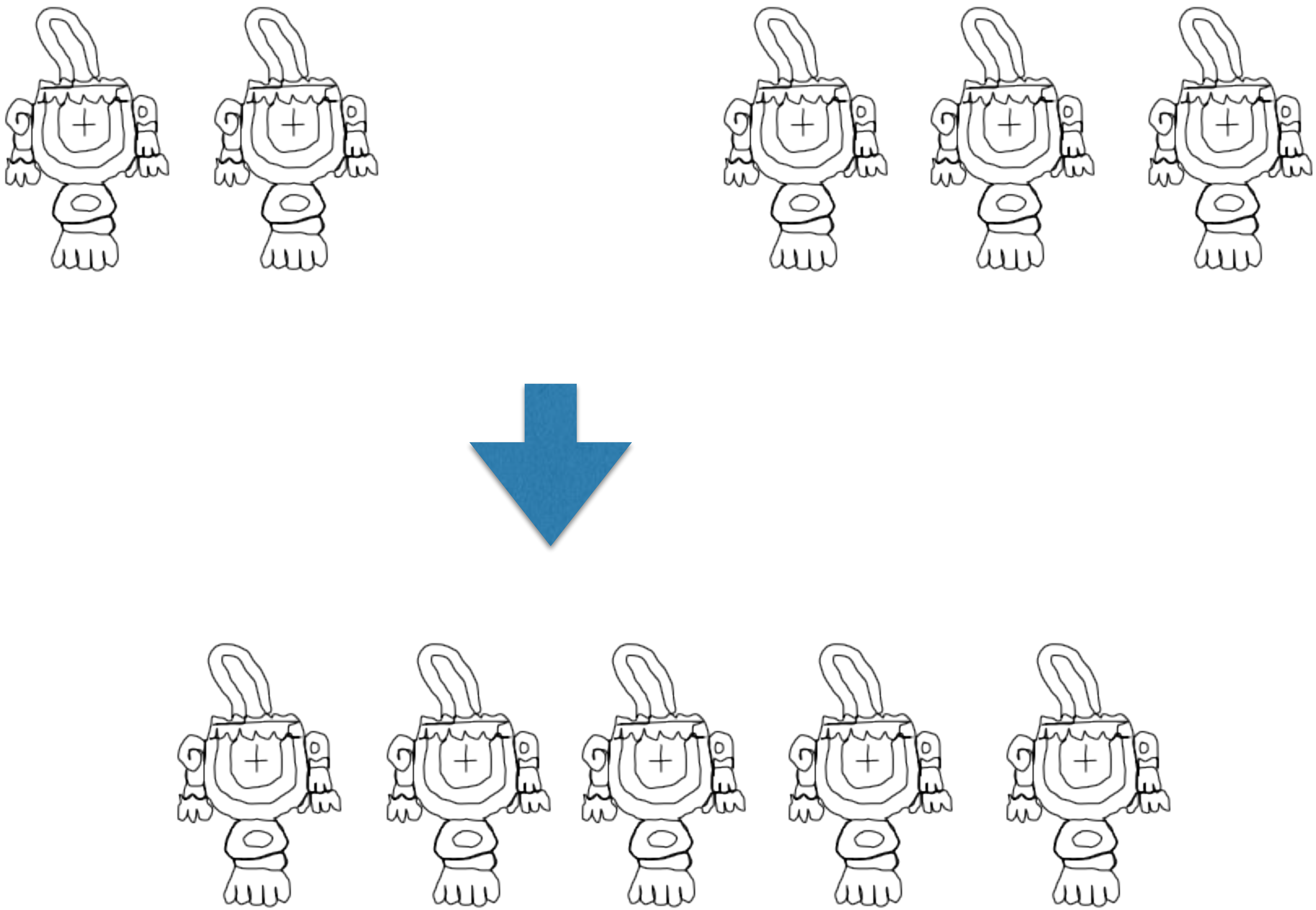
刻痕记事



最原始的系统：一进数字系统

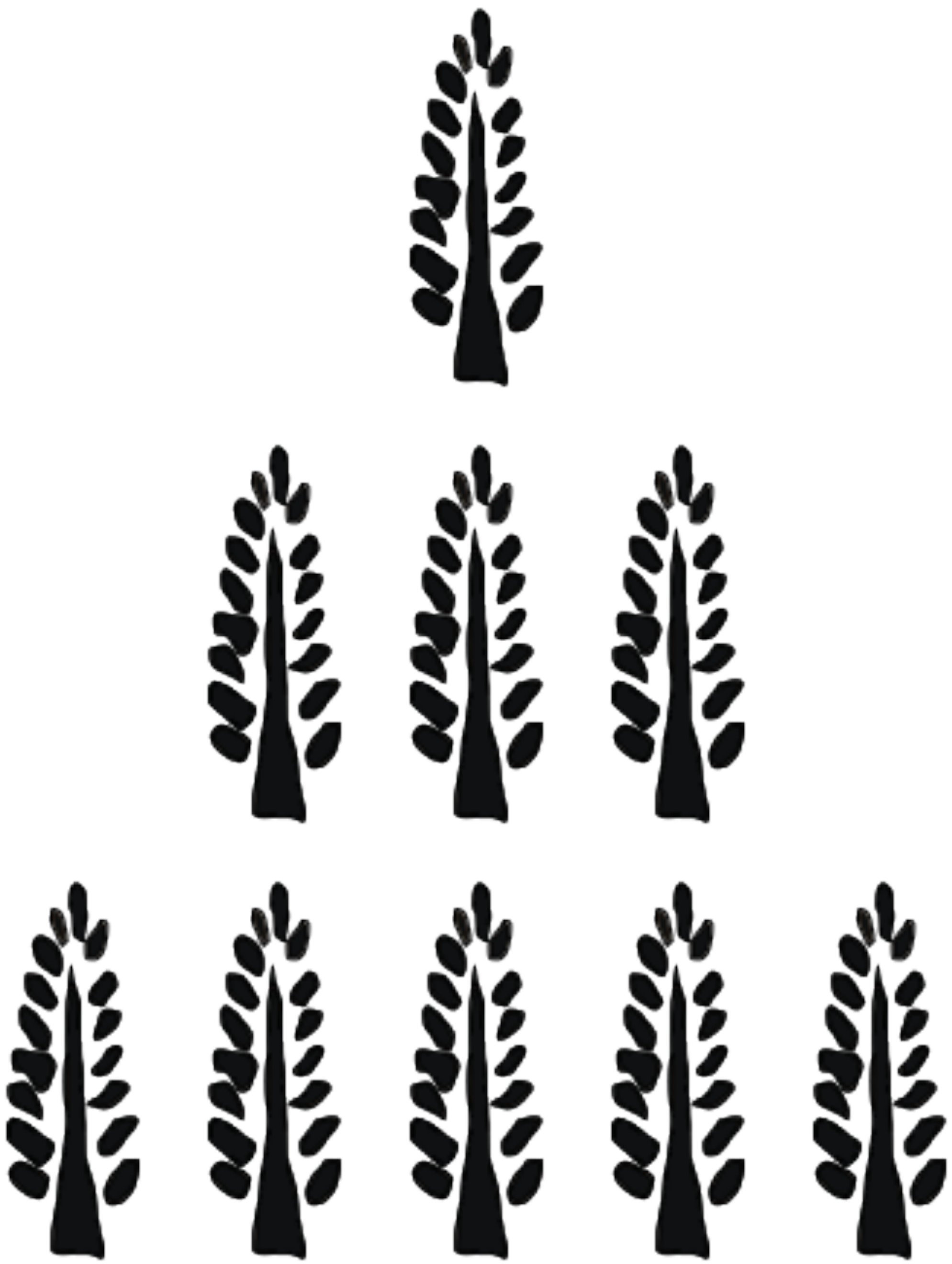
最自然的数字表示，但却难于表达大数字

原始的加法



原始的乘法

为什么会是乘法?



加法的重复就是乘法

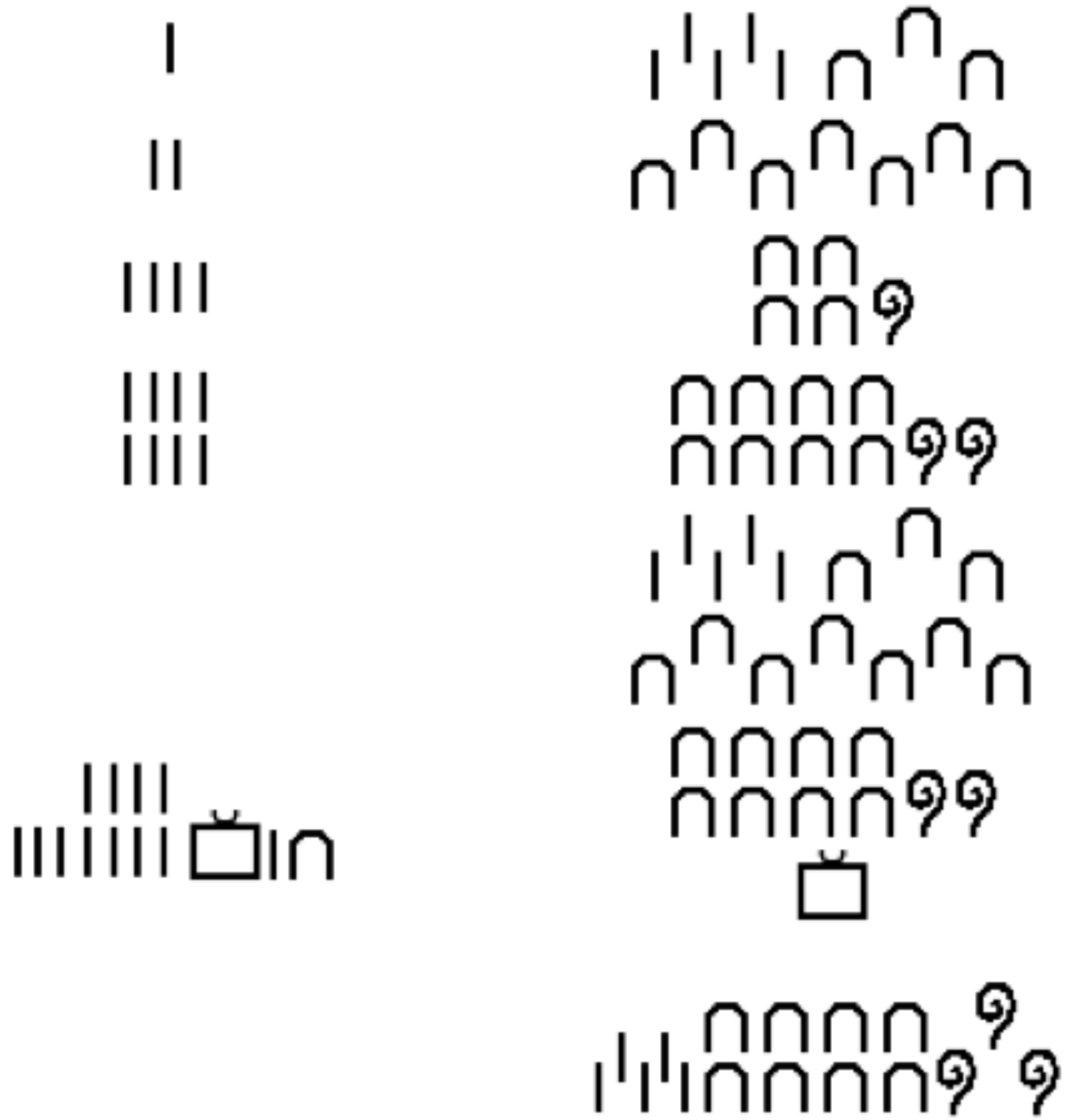
古埃及的数字

Heh

数值	一	十	百	千	万	十万	百万
符号	𓏺	𓎆	𓍢	𓆼	𓂭	𓆐	𓁨
描述	单竖线	踵骨	绳圈	水莲	屈指	蝌蚪	Heh 神

古埃及象形文字里的整数符号

古埃及的数乘



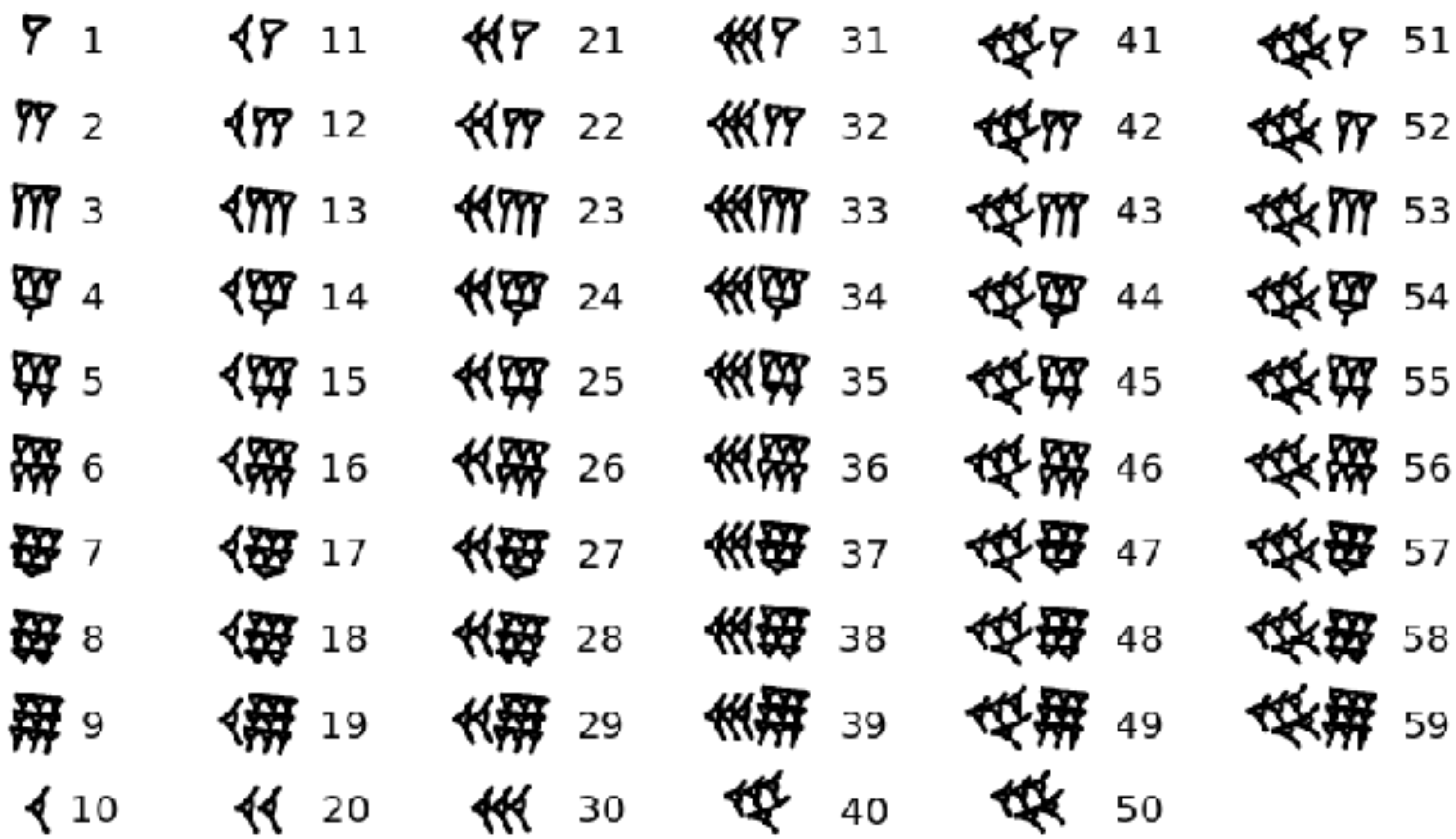
1*	35
2*	70
4	140
8*	280
1+2+8=11	35+70+280=385

在这个时期大数的
表示与运算都比较困难

Ahmes Papyrus

http://www.math.buffalo.edu/mad/Ancient-Africa/mad_ancient_egypt_arith.html

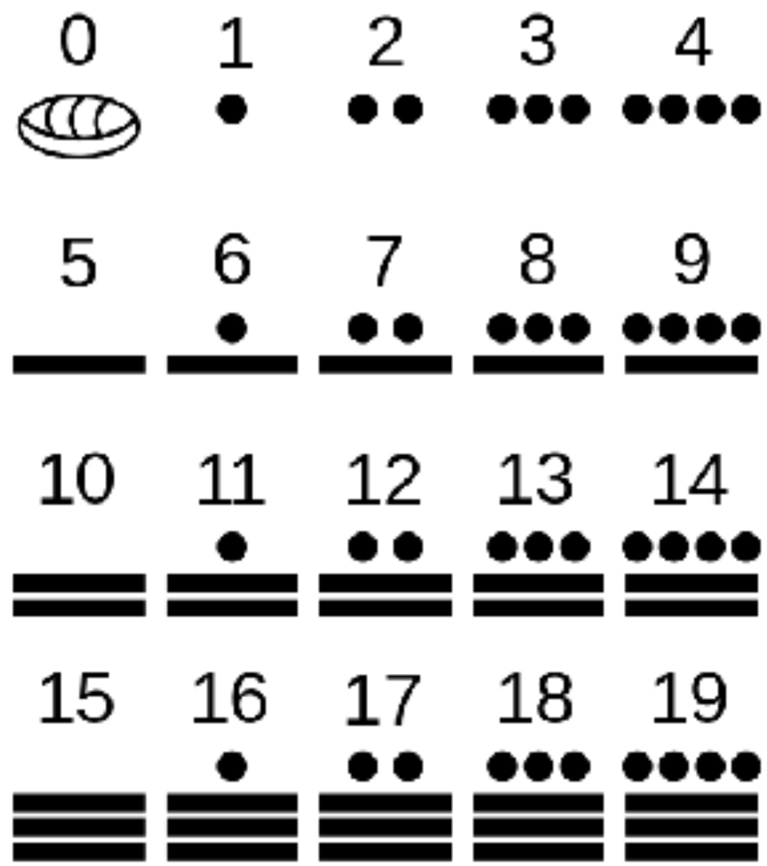
巴比伦的数字



第一个数位制系统巴比伦数制

60 进制系统的起源

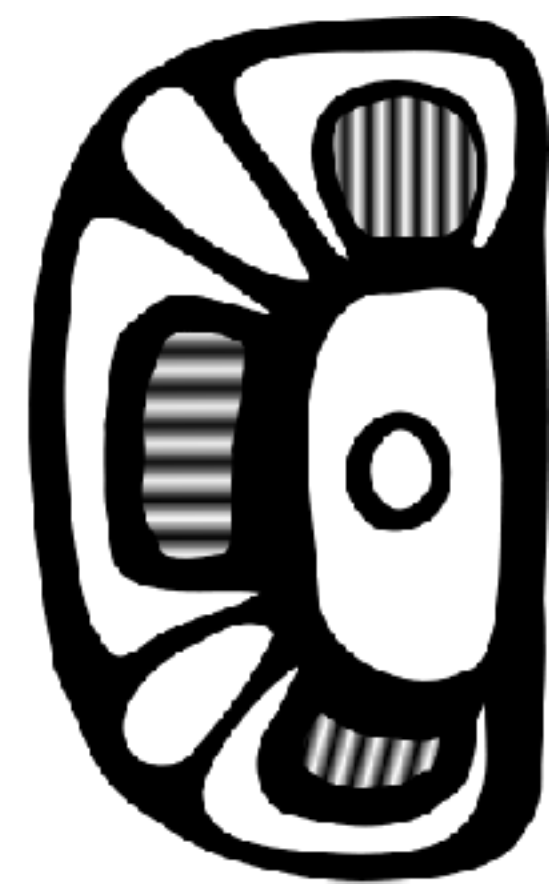
玛雅文化的数字



<ins>玛雅数制</ins>

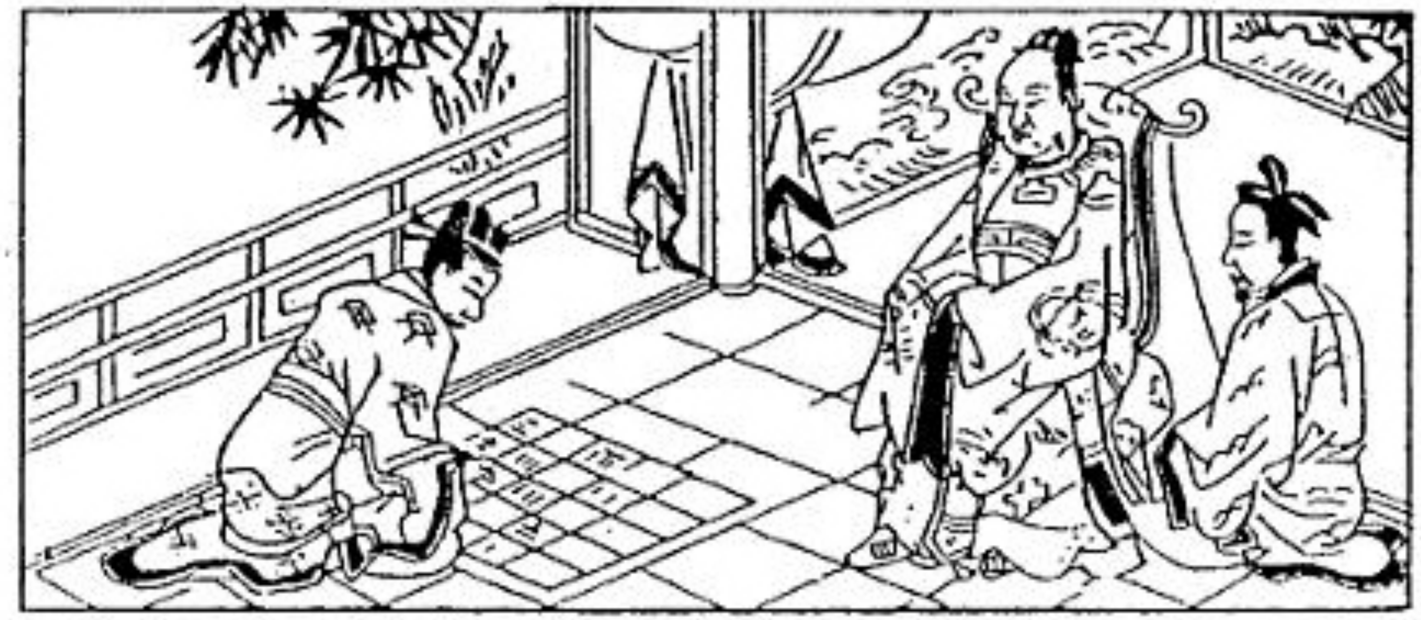
或许是第一个带零的数位制系统

20进制



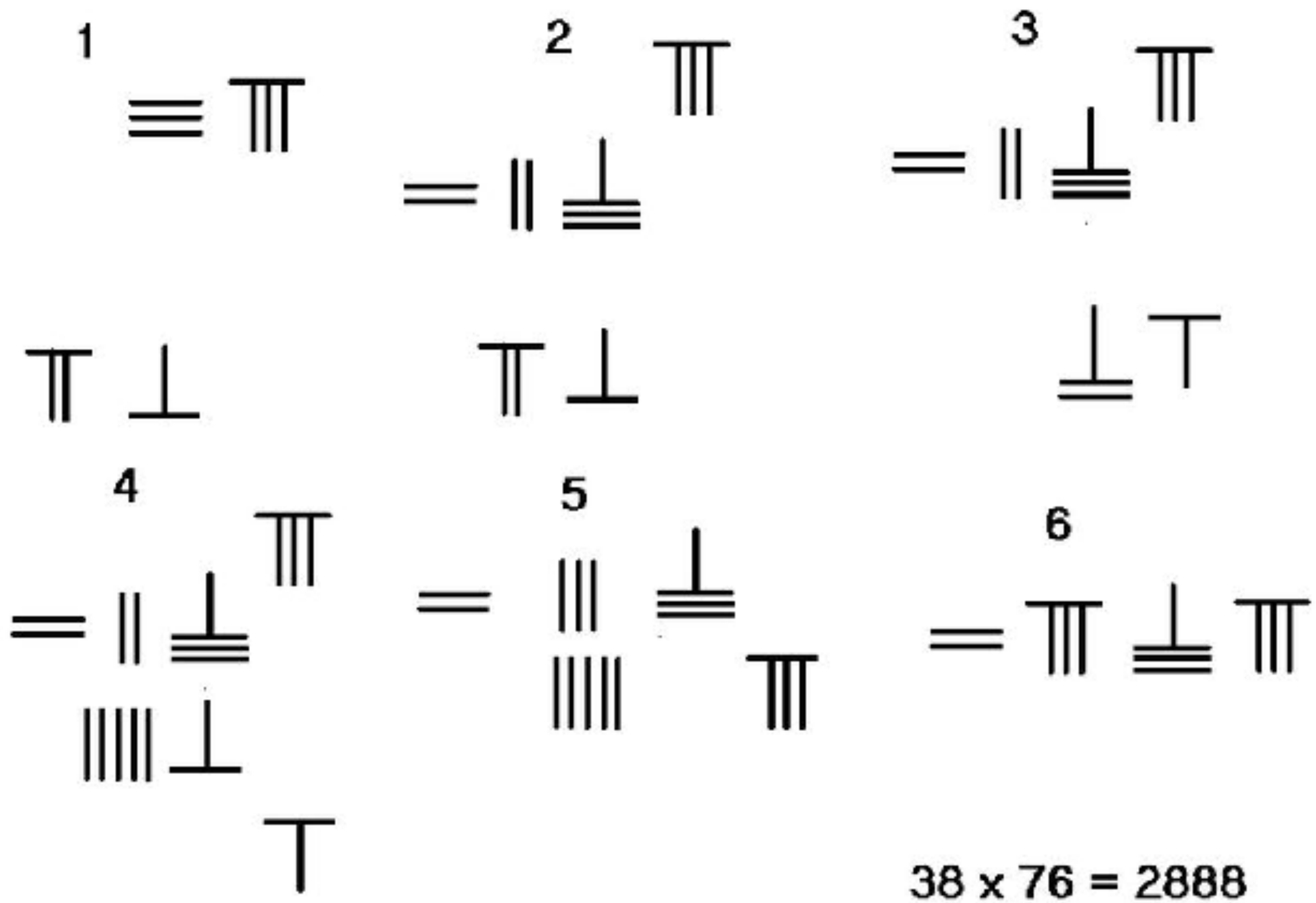
九九乘表与筹算

新編筭學啓蒙總括
釋九數法
一一如一 一二如二 二二如四
一三如三 二三如六 三三如九
一四如四 二四如八 三四一十二
四四一十六 一五如五 二五一十
三五一十五 四五二十 五五二十五
一六如六 二六一十二 三六一十八
四六二十四 五六三十 六六三十六
一七如七 二七一十四 三七二十一
新編筭學啓蒙總括 一



数位制表示法和运算法则都已经成熟

http://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%AD%B9%E7%AE%97



《夏侯阳算经》

夫乘除之法，先明九九，一从十横，百立千僵，千十相望，万百相当。满六已上，五在上方。六不积算，五不单张。上下相乘，实居中央。言十自当。已法除之，宜得上商，横算相当。以次右行，极于左方。

阿拉伯的格子乘法

```
     2   3   9   5   8   2   3   3
   +---+---+---+---+---+---+---+---+-
   |1 /|1 /|4 /|2 /|4 /|1 /|1 /|1 /|
   | / | / | / | / | / | / | / | / | 5
 01|/ 0|/ 5|/ 5|/ 5|/ 0|/ 0|/ 5|/ 5|
   +---+---+---+---+---+---+---+---+-
   |1 /|2 /|7 /|4 /|6 /|1 /|2 /|2 /|
   | / | / | / | / | / | / | / | / | 8
 02|/ 6|/ 4|/ 2|/ 0|/ 4|/ 6|/ 4|/ 4|
   +---+---+---+---+---+---+---+---+-
   |0 /|0 /|2 /|1 /|2 /|0 /|0 /|0 /|
   | / | / | / | / | / | / | / | / | 3
 17|/ 6|/ 9|/ 7|/ 5|/ 4|/ 6|/ 9|/ 9|
   +---+---+---+---+---+---+---+---+-
   |0 /|0 /|0 /|0 /|0 /|0 /|0 /|0 /|
   | / | / | / | / | / | / | / | / | 0
 24|/ 0|/ 0|/ 0|/ 0|/ 0|/ 0|/ 0|/ 0|
   +---+---+---+---+---+---+---+---+-
     26  15  13  18  17  13  09  00
```

```
01
002
0017
00024
000026
0000015
00000013
000000018
0000000017
00000000013
000000000009
0000000000000
=============
 139676498390
```

```
= 139,676,498,390
```

http://en.wikipedia.org/wiki/Long_multiplication#Lattice_multiplication

竖式乘法

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & 2 & 3 & 9 & 5 & 8 & 2 & 3 & 3 \\
\times & & & & & & & & & 5 & 8 & 3 & 0 \\
\hline
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 7 & 1 & 8 & 7 & 4 & 6 & 9 & 9 & \\
 & & 1 & 9 & 1 & 6 & 6 & 5 & 8 & 6 & 4 & & \\
+ & 1 & 1 & 9 & 7 & 9 & 1 & 1 & 6 & 5 & & & \\
\hline
 & 1 & 3 & 9 & 6 & 7 & 6 & 4 & 9 & 8 & 3 & 9 & 0
\end{array}
$$

第谷·布拉赫的 Prosthaphaeresis 法

计算 105 与 720 乘积的近似值

- 缩小： 0.105, 0.720
- 查表求角度： $\cos(84°) = 0.105$, $\cos(44°) = 0.720$
- 作和与差： $84 + 44 = 128$, $84 - 44 = 40$
- 求余弦的平均： $\frac{1}{2}[\cos(128°) + \cos(40°)] = \frac{1}{2}[-0.616 + 0.766] = 0.075$
- 放大: 75,000
- 真实值：75,600

引自 http://en.wikipedia.org/wiki/Prosthaphaeresis

Karatsuba 算法

第一个快速算法，发现于 1960 年代

- $12345 = 12 \cdot 1000 + 345$
- $6789 = 6 \cdot 1000 + 789$
- $z2 = 12 \times 6 = 72$
- $z0 = 345 \times 789 = 272205$
- $z1 = (12 + 345) \times (6 + 789) - z2 - z0 = 357 \times 795 - 72 - 272205 = 283815 - 72 - 272205 = 11538$

Kolmogorov 曾经认为不存在快速算法

他的学生 Karatsuba 发现了一个快速算法

引自 http://en.wikipedia.org/wiki/Karatsuba_algorithm

数的表示法

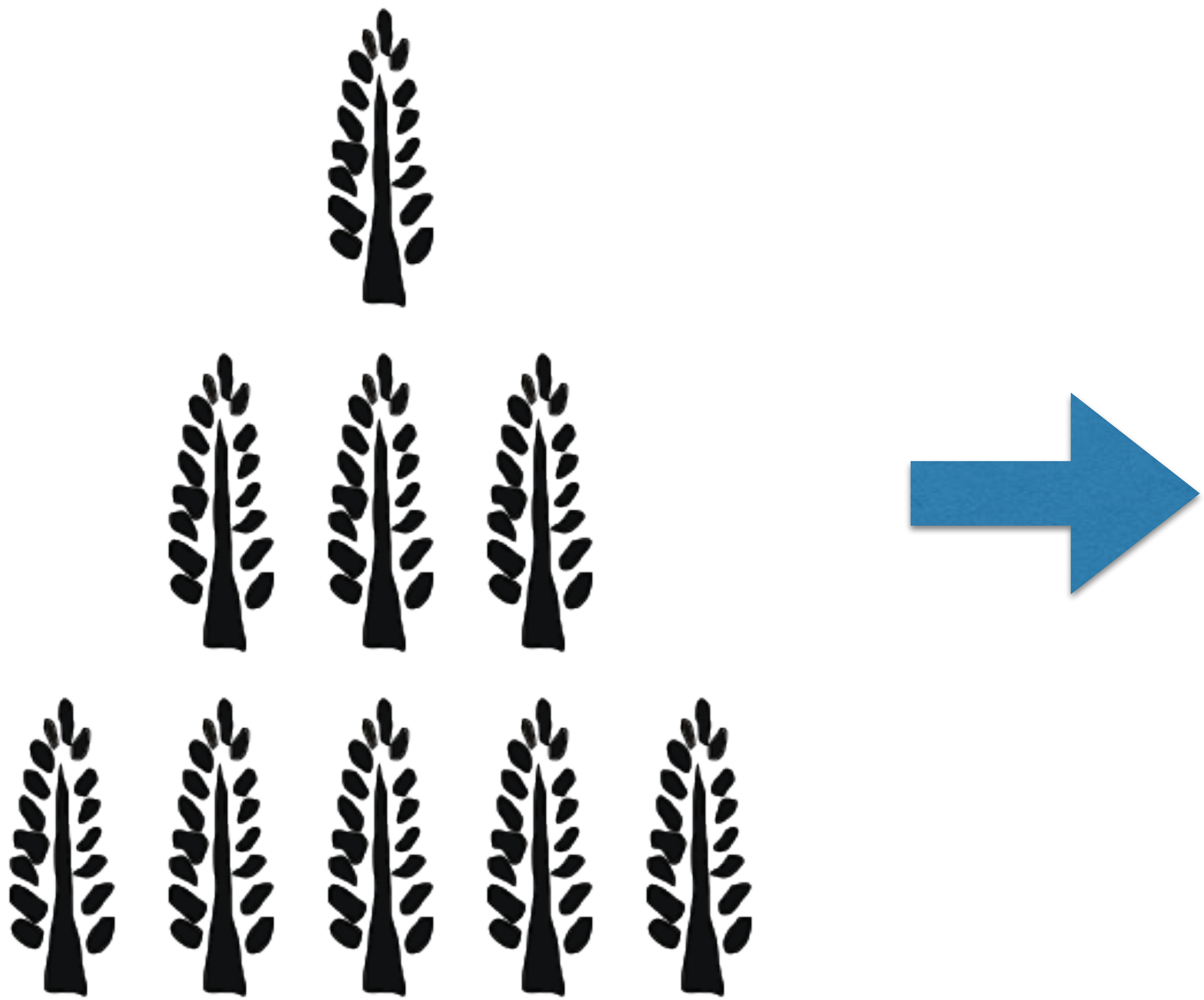
语言与世界的共处

假如你是发明者

- 数位制系统是晚近的发明，说明它有内在的困难
- 假如你是发明者，你会做什么?
- 让我们继续深入一点……

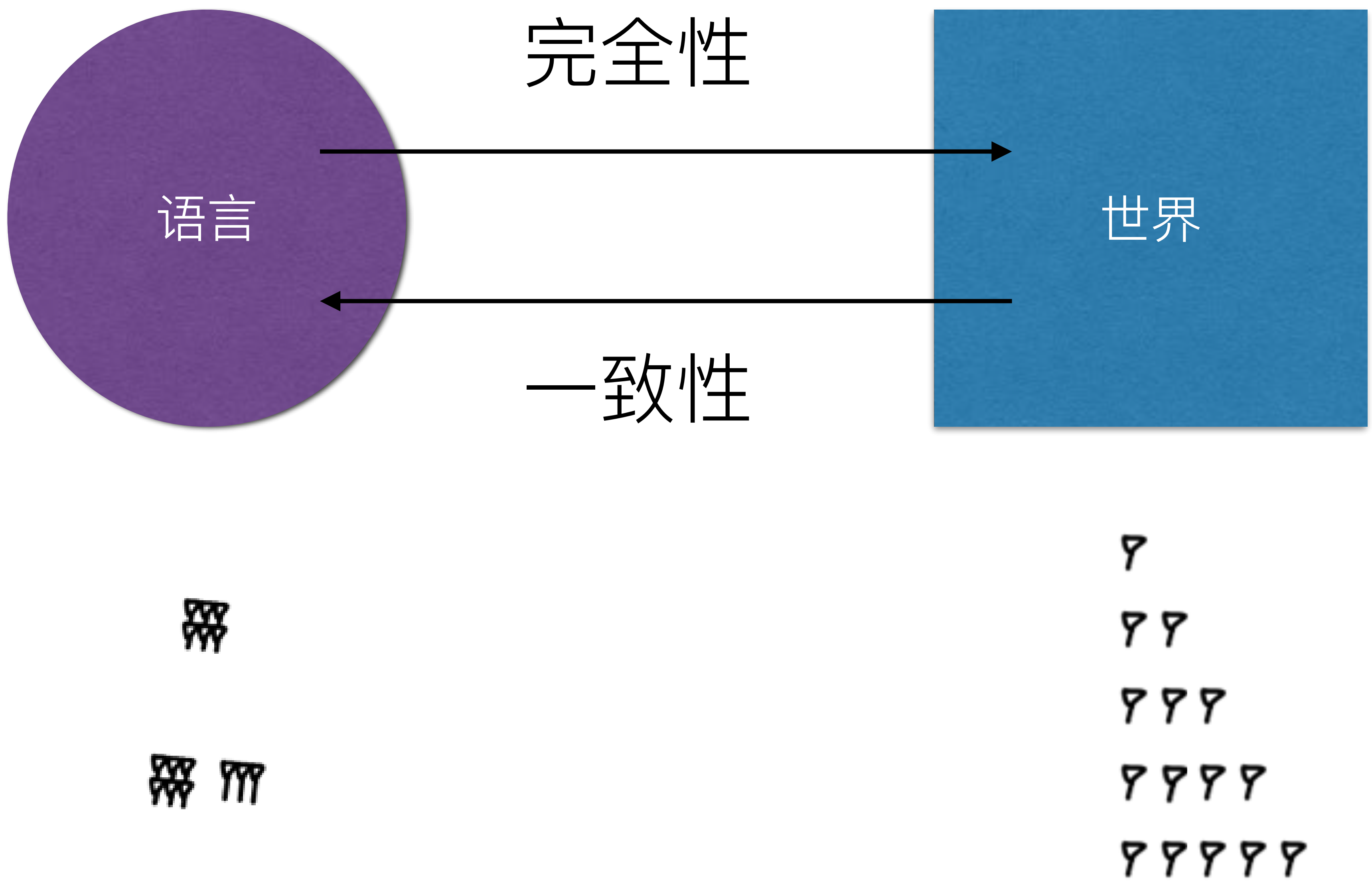
1、2、3、4、5……

我们出发的基础和方向



1
2
3
.
.
.
10
11
12
13
.
.
.
.
.

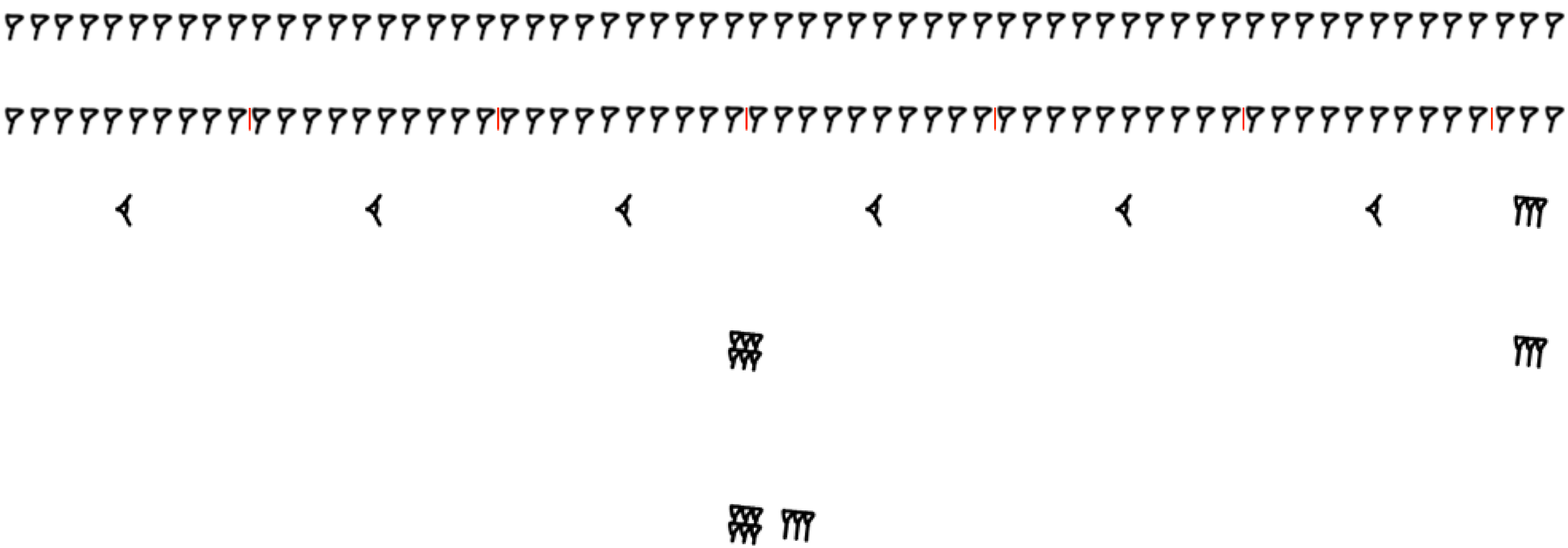
两看相不厌，唯有敬亭山



数位制表示符号的语言

一进数字符号的世界

一致性的证明概要

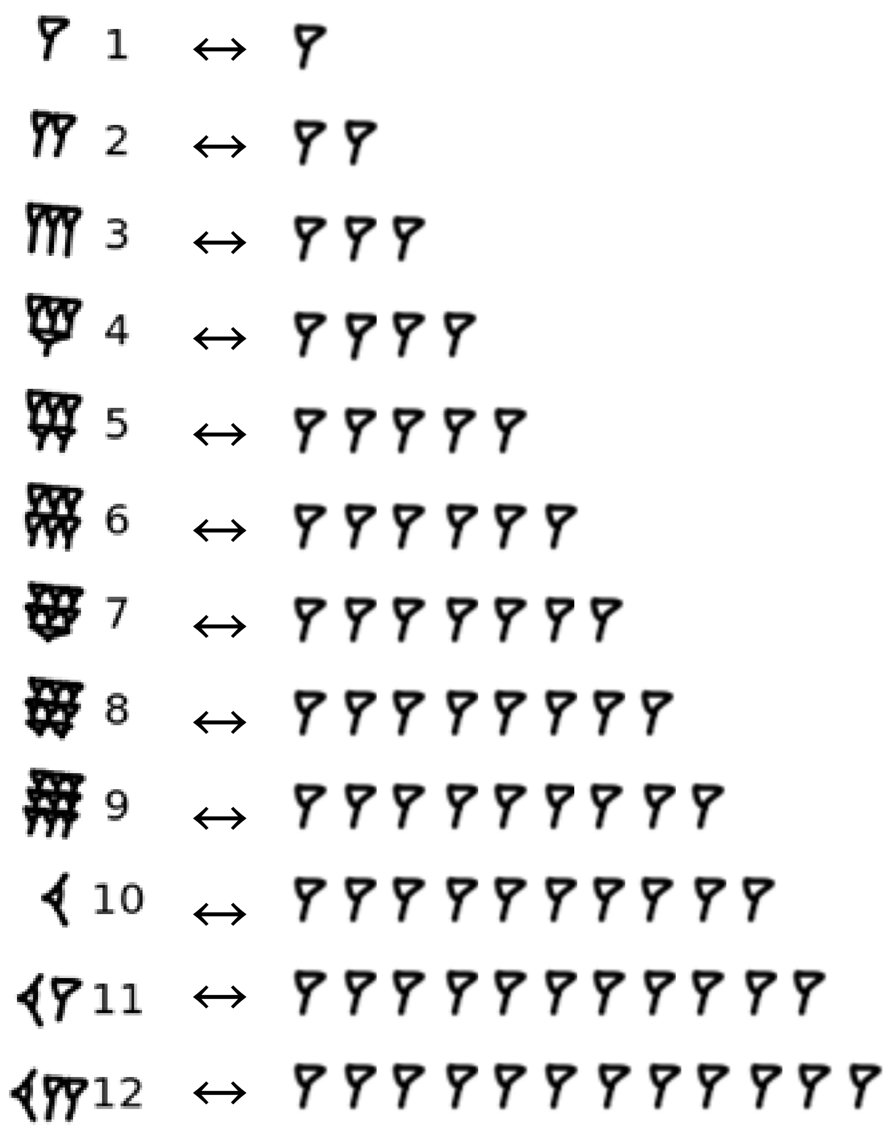


- 下述算法并没有改变小物件的总数，只是在分堆
  - 带余除法：十个、十个的归拢成一小堆，然后记录下余数，得到的小堆给下一步使用
  - 递归的施加带余除法，把小堆化成更大的堆，每步统计的是余下的堆数

完全性的证明概要

- 数位制的字串可以按照数字 0 ~ 9 的字符顺序建立一个非常自然的字典排序

- 这个字典顺序就是自然数的计数顺序



数的意义

数的自我自由之路

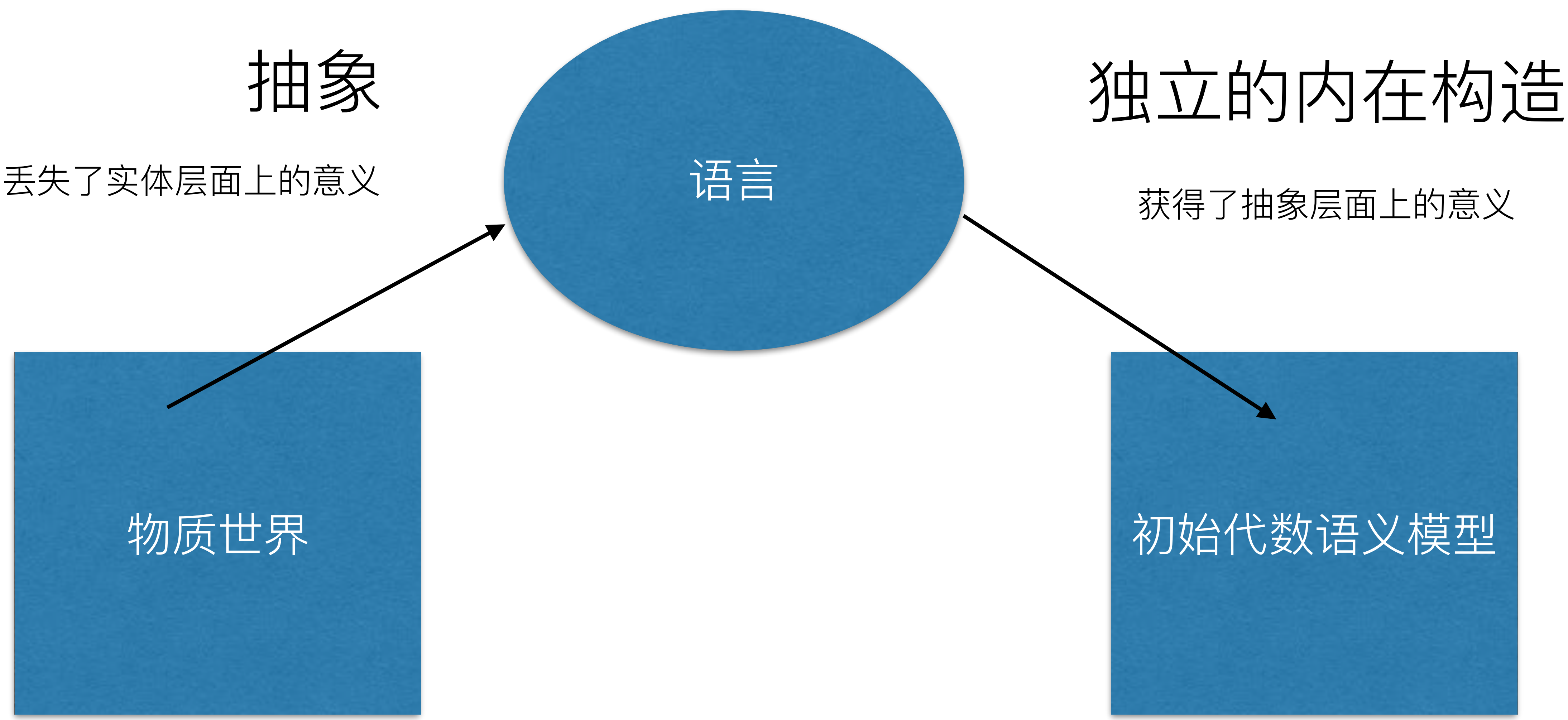
为什么可以信任“数”?

- 我们从实体抽象出来“数”，但是：
  - 古人看到一、二、三只猴子
  - 今人看到一、二、三辆汽车
  - 未来的人说不准又在数什么……

- 为什么我们可以信赖它？难道它能不依赖实体存在吗?

需要论证“数”有无需依赖其他而独立存在的模型

其他的“数”的模型都是和这个独立模型是相容洽的



语言层面的规范

- 表征计数的类型 N 由如下的需求规范定义：
- zero: $\to$ N
- succ: N $\to$ N

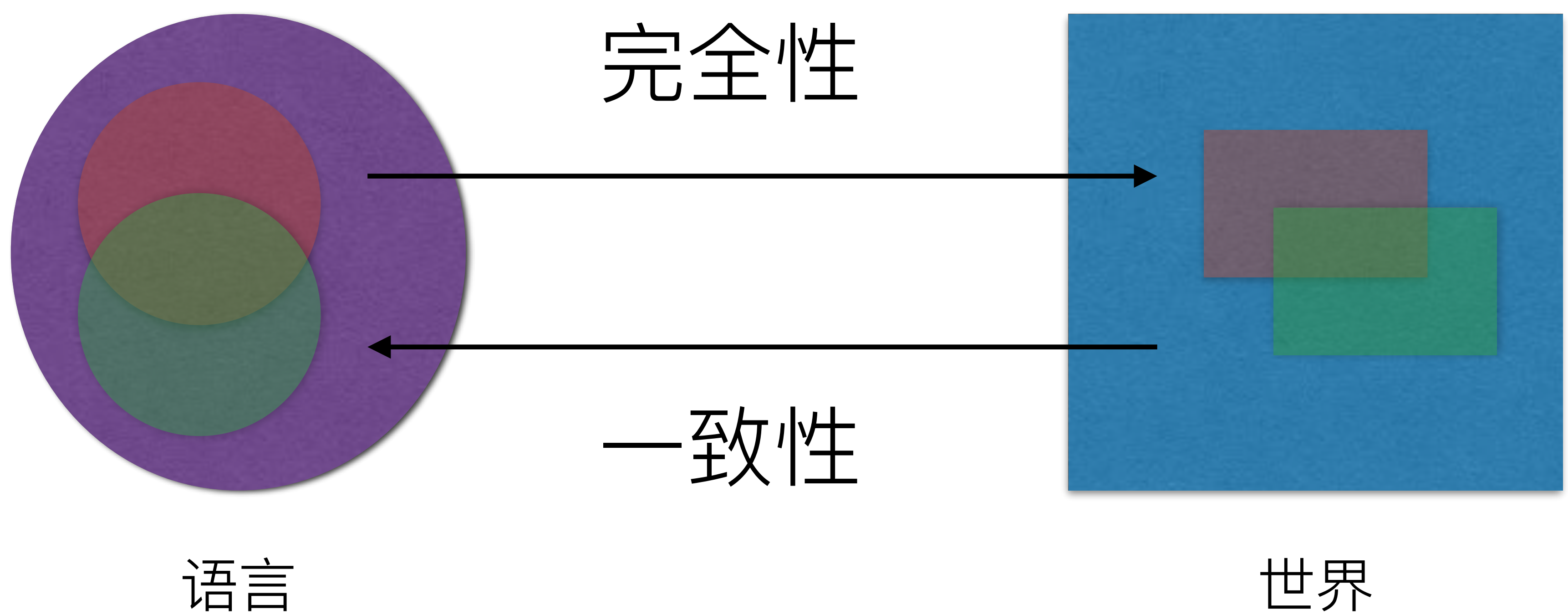
初始代数模型

- 考虑类型 N 的所有可能的表达式
- zero
- (succ zero)
- (succ (succ zero))
- (succ (succ (succ zero)))
- ……

自我的自由之路

- 初始代数模型没有依赖任何外部资源
- 初始代数模型的构造只依赖规范本身
- 这个自然数 N 的例子是非常平凡的
- 但这个自我表达的思想并不平凡，在逻辑学里证明一阶系统完全性时的 Herbrand 论域的构造也是如此。

谢谢



完全性
一致性
语言
世界